# Глава 3. Предельные теоремы для обобщенных процессов риска

## *§9. Обобщенные процессы риска*

Далее функции с параметром $\tau$ будут обозначать случайные процессы, а функции с параметром $t$ – их проекции.

Рассмотрим классический процесс риска

$$R_0\left(\tau\right) = u + c\tau - \sum_{j=1}^{N_\lambda(\tau)} X_j, \quad \tau \geq 0.$$

Пусть
$N_1(\tau)$, $\tau \geq 0$, – стандартный пуассоновский процесс;
$\Lambda(\tau)$, $\tau \geq 0$, – независимая от $N_1(\tau)$ случайная мера;
$N(\tau) = N_1(\Lambda(\tau))$, $\tau \geq 0$, – процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(\tau)$, независимый от последовательности $X_1, X_2, \ldots$

Рассмотрим процесс риска вида

$$R_1(\tau) = u + c\tau - \sum_{j=1}^{N(\tau)} X_j, \quad \tau \geq 0.$$

Предположим, что $\Lambda(\tau) \equiv \Lambda\tau$, где $\Lambda$ – неотрицательная случайная величина, $\mathsf{E}\Lambda < \infty$ и для любого $\lambda > 0$

$$\mathsf{P}(\Lambda \geq \lambda) > 0.$$

Пусть $\psi_0(u) = \psi_0(u, \lambda)$ – вероятность разорения для $R_0(\tau)$. Тогда вероятность разорения для $R_1(\tau)$ имеет вид

$$\psi_1(u) = \mathsf{E}\psi_0(u, \Lambda) = \int_0^\infty \psi_0(u, \lambda)\, d\mathsf{P}(\Lambda < \lambda) =$$

$$= \mathsf{E}\left[\psi_0(u, \Lambda)\mathbb{1}(\Lambda < c/\mu)\right] + \mathsf{E}\left[\psi_0(u, \Lambda)\mathbb{1}(\Lambda \geq c/\mu)\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left[\psi_0(u, \Lambda)\mathbb{1}(\Lambda < c/\mu)\right] + \mathsf{P}(\Lambda \geq c/\mu) \geq \mathsf{P}(\Lambda \geq c/\mu) > 0.$$

**Определение.** Пусть $N(\tau)$, $\tau \geq 0$, — процесс Кокса, управляемый процессом $\Lambda(\tau)$. Обобщенным процессом риска называется процесс

$$R(\tau) = u + c\Lambda(\tau) - \sum_{j=1}^{N(\tau)} X_j, \quad \tau \geq 0,$$

где случайные процессы $\Lambda(\tau)$ и $N(\tau)$ независимы от независимых одинаково распределенных (неотрицательных) случайных величин $X_1, X_2, \ldots$

**Замечание.** Вероятность разорения для обобщенного процесса риска совпадает с вероятностью разорения для классического процесса риска:

$$\psi(u) = \mathsf{P}\left(\inf_{t>0} R(t) < 0\right) = \psi_0(u) = \mathsf{P}\left(\inf_{t>0} R_0(t) < 0\right).$$

**Теорема (ЗБЧ для проекций обобщенного процесса риска).** *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$ *и* $c \neq \mu$. *Пусть* $D(t) > 0$ *– неограниченно возрастающая функция. Тогда*

$$\frac{R(t)}{D(t)} \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty)$$

*в том и только в том случае, когда существует неотрицательная случайная величина* $U$ *такая, что*

$$\frac{\Lambda(t)}{D(t)} \Longrightarrow U \quad (t \to \infty).$$

*При этом* $Z \stackrel{d}{=} (c-\mu)U$.

**Теорема (ЦПТ для проекций обобщенного процесса риска).** *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1 = \mu \neq 0$ *и* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$. *Пусть* $D(t) > 0$ *– такая функция, что* $D(t) \longrightarrow \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда одномерные распределения надлежащим образом центрированного и нормированного обобщенного процесса риска* $R(\tau)$ *слабо сходятся при* $t \to \infty$ *к распределению некоторой случайной величины* $Z$*, то есть*

$$\frac{-R\,(t) - C\,(t)}{D\,(t)} \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty)$$

*при некоторой вещественной функции* $C(t)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{|C\,(t)\,|}{D^2\,(t)} \equiv k^2 < \infty,$$

*и существует такая случайная величина* $V$*, что*

$$Z \stackrel{d}{=} k \cdot \sqrt{\frac{\mu^2 + \sigma^2}{|\mu - c|}} \cdot W + V,$$

*где $W$ – случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от $V$, и*

$$L_1\left(\frac{(\mu-c)\,\Lambda(t)-C(t)}{D(t)},V(t)\right)\longrightarrow 0\quad (t\to\infty)\,,$$

*где распределения случайных величин $V(t)$ определяются характеристическими функциями*

$$\mathsf{E}\exp\left\{isV(t)\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{s^2\left(\mu^2+\sigma^2\right)}{2|\mu-c|}\left[k^2-\frac{|C(t)\,|}{D^2(t)}\right]\right\}\mathsf{E}\exp\left\{isV\right\},\quad s\in\mathbb{R}.$$

**Теорема.** *Предположим, что* $\mathsf{E}\Lambda(t) \equiv t$ *и* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда одномерные распределения надлежащим образом центрированного и нормированного обобщенного процесса риска слабо сходятся при* $t \to \infty$ *к распределению некоторой случайной величины* $Z$, *то есть*

$$\frac{R\,(t) - (c - \mu)\,t}{\sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)\,t}} \Longrightarrow Z \qquad (t \to \infty)\,,$$

*тогда и только тогда, когда существует случайная величина* $V$ *такая, что*

1. $\mathsf{P}\,(Z < x) = \mathsf{E}\Phi\left(x - \dfrac{c - \mu}{\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} \cdot V\right);$
2. $\dfrac{\Lambda\,(t) - t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow V \qquad (t \to \infty)\,.$

**Замечание.** В теореме проекция процесса $R(\tau)$ нормируется не его дисперсией, а величиной $\sqrt{(\mu^2+\sigma^2)t}$. Тем самым, существование дисперсии у проекции управляющего процесса $\Lambda(\tau)$ не предполагается.

**Следствие.** *В условиях теоремы проекции обобщенного процесса риска $R(\tau)$ асимптотически нормальны*

$$\mathsf{P}\left(\frac{R\,(t)-(c-\mu)\,t}{\sqrt{(\mu^2+\sigma^2)\,t}}<x\right)\Longrightarrow\Phi\left(x/\delta\right)\quad(t\to\infty)$$

*с некоторой асимптотической дисперсией $\delta^2$ тогда и только тогда, когда $\delta^2\ge 1$ и*

$$\mathsf{P}\left(\frac{\Lambda\,(t)-t}{\sqrt{t}}<x\right)\Longrightarrow\Phi\left(\frac{x|c-\mu|}{\sqrt{(\delta^2-1)\,(\mu^2+\sigma^2)}}\right)\quad(t\to\infty).$$

## §10. Теоремы переноса для проекций обобщенных процессов риска

Рассмотрим схему серий и предположим, что заданы:
последовательность $\{\Lambda_n(\tau)\}_{n\geq 1}$ случайных мер;
последовательность $\{N_{1,n}(\tau)\}_{n\geq 1}$ стандартных пуассоновских процессов;
последовательность серий $\{X_{n,j}\}_{n\geq 1}$, одинаково в каждой серии распределенных случайных величин;
последовательности $\{c_n\}_{n\geq 1}$ и $\{t_n\}_{n\geq 1}$ положительных чисел.

Предположим, что при каждом $n \geq 1$ все указанные процессы и случайные величины независимы.

Нас будет интересовать асимптотическое (при $n \to \infty$) поведение распределений случайных величин

$$R_n(t_n) = c_n \Lambda_n(t_n) - \sum_{j=1}^{N_{1,n}(\Lambda_n(t_n))} X_{n,j}.$$



Обозначим $\Lambda_n = \Lambda_n(t_n)$, $R_n = R_n(t_n)$, $N_n = N_{1,n}(\Lambda_n(t_n))$.

**Теорема.** *Предположим, что существуют неограниченно возрастающая последовательность $\{k_n\}_{n\geq 1}$ натуральных чисел, последовательность $\{a_n\}_{n\geq 1}$ вещественных чисел и случайные величины $U$, $V$ и $Y$ такие, что при $n\to\infty$*

$$\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \Longrightarrow Y, \quad \frac{\Lambda_n}{k_n} \Longrightarrow U, \quad c_n\Lambda_n - a_n \Longrightarrow V.$$

*Пусть при этом $h(s)$ – характеристическая функция случайной величины $Y$.*

**(i)** *Пусть обе случайные величины $U$ и $V$ не являются вырожденными. Тогда существуют числа $a>0$ и $b\in\mathbb{R}$ такие, что имеет место сходимость*

$$R_n - a_n \Longrightarrow -Z \qquad (n\to\infty)\,, \tag{$*$}$$

*где $Z$ – случайная величина с характеристической функцией*

$$f\left(s\right) = e^{-isb}\mathsf{E}\left[e^{-isa}h\left(s\right)\right]^U, \quad s\in\mathbb{R}.$$

**(ii)** *Пусть* $\mathsf{P}(V = \gamma) = 1$ *для некоторого* $\gamma \in \mathbb{R}$. *Тогда имеет место сходимость* $(*)$, *где* $Z$ *– случайная величина с характеристической функцией*

$$f(s) = e^{-is\gamma}\mathsf{E}h^U(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

**(iii)** *Пусть* $\mathsf{P}(U = \alpha) = 1$ *для некоторого* $\alpha \geq 0$. *Тогда имеет место сходимость* $(*)$, *где* $Z$ *– случайная величина с характеристической функцией*

$$f(s) = h^\alpha(s)\,\mathsf{E}e^{-isV}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Определение.** Будем говорить, что пара случайных величин $(U, V)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_0$, если, во-первых, $\mathsf{P}(U \geq 0) = 1$ и, во-вторых, либо хотя бы одна из двух случайных величин $U$ и $V$ вырождена, либо для некоторых чисел $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}(V = aU + b) = 1.$$

Поставим в соответствие каждой случайной величине $Z$ множество $\mathcal{M}(Z)$, содержащее все тройки случайных величин $(Y, U, V)$, позволяющие представить характеристическую функцию $f(t)$ случайной величины $Z$ в виде

$$f\left(t\right) = \mathsf{E}\left[h^{U}\left(t\right)e^{-isV}\right],$$

причем пара случайных величин $(U, V)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_0$, а $h(t)$ является характеристической функцией случайной величины $Y$.

Для любой случайной величины $Z$ множество $\mathcal{M}(Z)$ содержит по крайней мере два элемента: тройки $(1, 0, -Z)$ и $(Z, 1, 0)$.

**Теорема.** *Предположим, что* $\Lambda_n \xrightarrow{P} \infty$ *и* $\alpha_n^2 \Lambda_n \xrightarrow{P} 0$ *при* $n \to \infty$*. Слабая сходимость при* $n \to \infty$ *неслучайно центрированных проекций обобщенных процессов риска*

$$c_n \Lambda_n - \sum_{j=1}^{N_n} X_{n,j} - a_n \Longrightarrow -Z$$

*к некоторой случайной величине* $-Z$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует слабо относительно компактная последовательность троек* $\{(Y_n, U_n, V_n)\}_{n \geq 1}$ *из класса* $\mathcal{M}(Z)$ *такая, что*

1. $L\left(\sum_{j=1}^{k'_n} \left(X_{n,j} - \alpha_n\right), Y_n\right) \longrightarrow 0;$
2. $L\left(\Lambda_n / k'_n, U_n\right) \longrightarrow 0;$
3. $L\left(\left(c_n - \alpha_n\right) \Lambda_n - a_n, V_n\right) \longrightarrow 0,$

*где постоянные* $\alpha_n$ *и* $k'_n$ *описаны ниже, а* $L(\cdot, \cdot)$ *– расстояние в пространстве функций распределения, метризующее слабую сходимость.*

Обозначим через $l_n(q)$ левую $q$-квантиль, $q \in (0,\, 1)$, случайной величины $N_n$, и пусть

$$\alpha_{n,j} = \alpha_{n,j}\,(v) = \int\limits_{|x|<v} x\, d\mathsf{P}\,(X_{n,j} < x)\,,$$

где $v$ – произвольное положительное число. Через $\mathsf{med}X$ обозначим медиану случайной величины $X$.
Пусть

$$m_{n,j} = \mathsf{med}X_{n,j},\ \ \beta_{n,j} = \beta_{n,j}\,(v) = \int\limits_{|x|<v} x\, d\mathsf{P}\,(X_{n,j} - m_{n,j} < x)\,.$$

В случаях, когда случайные величины в каждой серии являются независимыми и одинаково распределенными, мы будем использовать обозначения:

$$\alpha_n = \alpha_n\,(v) = \int\limits_{|x|<v} x\, d\mathsf{P}\,(X_{n,1} < x)\,,$$

$$d_n = d_n(v) = \mathsf{E}\left(\frac{(X_{n,1}-\alpha_n)^2}{1+(X_{n,1}-\alpha_n)^2}\right),$$

где $v$ – произвольное положительное число. Обозначим через $m_n$ медиану случайной величины $X_{n,1}$; через $\delta_n$ – расстояние Леви между функцией распределения $\mathsf{P}(N_n(d_n+|\alpha_n|) < x)$ и функцией распределения $\mathcal{E}(x)$ случайной величины, тождественно равной нулю; пусть

$$k_n^* = \begin{cases} l_n\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right), & \text{если } d_n+|\alpha_n| = 0; \\ \left[\dfrac{1}{|\alpha_n|}\right], & \text{если } d_n = 0,\ |\alpha_n| > 0; \\ \left[\dfrac{2\delta_n}{d_n+|\alpha_n|}\right]+1, & \text{если } d_n > 0, \end{cases}$$

где $[\cdot]$ – целая часть числа;

$$\beta_n = \beta_n(v) = \int_{|x|<v} x\, d\mathsf{P}\left(X_{n,1} - m_n < x\right);$$

$$\gamma_n = \gamma_n(v) = \int_{|x|<v} x\, d\mathsf{P}\left(X_{n,1} - m_n - \beta_n < x\right);$$

$$\Delta_n = \Delta_n(v) = \mathsf{E}\left(\frac{\left(X_{n,1} - m_n - \beta_n - \gamma_n\right)^2}{1 + \left(X_{n,1} - m_n - \beta_n - \gamma_n\right)^2}\right);$$

$$k_n = \begin{cases} l_n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right), & \text{если } \Delta_n + |\gamma_n| = 0; \\ \left[\dfrac{1}{|\gamma_n|}\right], & \text{если } \quad \Delta_n = 0,\ |\gamma_n| > 0; \\ \left[\dfrac{2\varepsilon_n}{\Delta_n + |\gamma_n|}\right] + 1, & \text{если } \quad \Delta_n > 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon_n$ обозначает расстояние Леви между функциями распределения $\mathcal{E}(x)$ и $\mathsf{P}(N_n(\Delta_n + |\gamma_n|) < x)$, а $v$ – произвольное положительное число.

Определим последовательность $\{k'_n\}_{n\geq 1}$ следующим образом. Обозначим

$$\gamma'_n = \gamma'_n(v) = \int\limits_{|x|<v} x\, d\mathsf{P}\left(X_{n,1} - \alpha_n < x\right);$$

$$\Delta'_n = \Delta'_n(v) = \mathsf{E}\left(\frac{\left(X_{n,1} - \alpha_n - \gamma'_n\right)^2}{1 + \left(X_{n,1} - \alpha_n - \gamma'_n\right)^2}\right);$$

$$k'_n = \begin{cases} l_n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right), & \text{если } \Delta'_n + |\gamma'_n| = 0; \\ \left[\dfrac{1}{|\gamma'_n|}\right], & \text{если } \Delta'_n = 0,\ |\gamma'_n| > 0; \\ \left[\dfrac{2\varepsilon'_n}{\Delta'_n + |\gamma'_n|}\right] + 1, & \text{если } \Delta'_n > 0, \end{cases}$$

где $\varepsilon'_n$ обозначает расстояние Леви между функциями распределения $\mathcal{E}(x)$ и $\mathsf{P}(N_n(\Delta'_n + |\gamma'_n|) < x)$, а $v$ – произвольное положительное число.

## *§11. Функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов риска*

**Теорема (общая теорема).** *Предположим, что*

- *a1)* $\Lambda_n^{[1]}(\tau)$ *являются процессами Леви,* $n = 1, 2, \ldots$*;*
- *a2)* $\mathsf{E}\left(\Lambda_n^{[1]}(1)\right)^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}X_{n,1}^2 < \infty$*,* $n = 1, 2, \ldots$

*Предположим также, что существуют неограниченно возрастающая последовательность* $\{k_n\}_{n \geq 1}$ *натуральных чисел и последовательность* $\{a_n\}_{n \geq 1}$ *вещественных чисел такие, что при* $n \to \infty$

- *b1)* $\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \Longrightarrow Y$;
- *b2)* $k_n^{-1}\Lambda_n^{[1]}(1) \Longrightarrow U$;
- *b3)* $c_n\Lambda_n^{[1]}(1) - a_n \Longrightarrow V$,

*где случайные величины* $Y$, $V$ *и* $U$ *такие, что* $\mathsf{E}Y^2 < \infty$*,* $\mathsf{E}V^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}U^2 < \infty$.

*Предположим, что справедливо хотя бы одно из следующих двух условий:*

- *c1)* $\limsup_{n\to\infty}\left[(c_n+\mu_n)\,\mathsf{E}\Lambda_n^{[1]}(1)+|a_n|\right]<\infty;$
- *c2)* $\begin{cases}\limsup_{n\to\infty}\left|(c_n-\mu_n)\,\mathsf{E}\Lambda_n^{[1]}(1)-a_n\right|<\infty;\\ \limsup_{n\to\infty}(c_n-\mu_n)^2\,\mathsf{D}\Lambda_n^{[1]}(1)<\infty;\\ \limsup_{n\to\infty}(\sigma_n^2+\mu_n^2)\,\mathsf{E}\Lambda_n^{[1]}(1)<\infty.\end{cases}$

*Тогда неслучайно центрированные обобщенные процессы риска* $R_n^{[1]}(\tau)-a_n(\tau)$ *слабо сходятся при* $n\to\infty$ *к процессу Леви* $-Z^{[1]}(\tau)$ *такому, что распределение случайной величины* $Z^{[1]}(1)$ *определяется характеристической функцией*

$$f(s)=\mathsf{E}\left[h^U(s)\,e^{-isV}\right],\quad s\in\mathbb{R},$$

*где* $h(s)$ *– характеристическая функция случайной величины* $Y$.

**Теорема (функциональная ЦПТ).** *Предположим, что*

- *a1)* $\Lambda_n^{[1]}(\tau)$ *являются процессами Леви,* $n = 1, 2, \ldots$*;*
- *a2)* $\mathsf{E}\left(\Lambda_n^{[1]}(1)\right)^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}X_{n,1}^2 < \infty$*,* $n = 1, 2, \ldots$

*Предположим также, что существует неограниченно возрастающая последовательность* $\{k_n\}_{n \geq 1}$ *натуральных чисел такая, что*

- *b1) существуют числа* $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma > 0$ *такие, что*

$$k_n \mu_n \longrightarrow \mu, \qquad k_n \sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2$$

  *при* $n \to \infty$*;*
- *b2) для любого* $\varepsilon > 0$

$$k_n \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} x^2 \, d\mathsf{P}\left(X_{n,1} - \mu_n < x\right) \longrightarrow 0$$

  *при* $n \to \infty$*;*

- *b3)* $k_n^{-1}\Lambda_n^{[1]}(1) \Longrightarrow U$, $c_n\Lambda_n^{[1]}(1) - a_n \Longrightarrow V$ *при* $n \to \infty$*, где случайные величины* $U$ *и* $V$ *такие, что* $\mathsf{E}U^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}V^2 < \infty$*;*
- *b4)* $\limsup_{n\to\infty} k_n^{-2}\mathsf{E}\left(\Lambda_n^{[1]}(1)\right)^2 < \infty.$

*Тогда неслучайно центрированные обобщенные процессы риска* $R_n^{[1]}(\tau) - a_n(\tau)$ *слабо сходятся при* $n \to \infty$ *к процессу Леви* $-Z^{[1]}(\tau)$ *такому, что*

$$Z^{[1]}(1) \stackrel{d}{=} \sigma\sqrt{U}W + \mu U - V,$$

*где* $W$ *– случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение, независимая от* $U$ *и* $V$*.*

**Теорема (функциональный ЗБЧ).** *Предположим, что*

- *a1)* $\Lambda_n^{[1]}(\tau)$ *являются процессами Леви,* $n = 1, 2, \ldots$*;*
- *a2)* $\mathsf{E}\left(\Lambda_n^{[1]}(1)\right)^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}X_{n,1}^2 < \infty$*,* $n = 1, 2, \ldots$

*Предположим также, что существует неограниченно возрастающая последовательность* $\{k_n\}_{n\geq 1}$ *натуральных чисел такая, что*

- *b1) существует* $d > 0$*, что* $k_n\mu_n \longrightarrow d$*,* $k_n\sigma_n^2 \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$*;*
- *b2)* $k_n^{-1}\Lambda_n^{[1]}(1) \Longrightarrow U$, $c_n\Lambda_n^{[1]}(1) - a_n \Longrightarrow V$ *при* $n \to \infty$*, где случайные величины* $U$ *и* $V$ *такие, что* $\mathsf{E}U^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}V^2 < \infty$*,*

*и справедливо хотя бы одно из условий*

- *c1)* $\limsup_{n\to\infty}\left[(c_n + \mu_n)\,\mathsf{E}\Lambda_n^{[1]}(1) + |a_n|\right] < \infty$;
- *c2)* $\limsup_{n\to\infty} k_n^{-2}\mathsf{E}\left(\Lambda_n^{[1]}(1)\right)^2 < \infty$.

*Тогда* $R_n^{[1]}(\tau) - a_n(\tau)$ *слабо сходятся при* $n \to \infty$ *к процессу Леви* $-Z^{[1]}(\tau)$ *такому, что* $Z^{[1]}(1) \stackrel{d}{=} dU - V$.

# Прикладные задачи теории вероятностей

Алексей Андреевич Кудрявцев

# Рекомендуемая литература

Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я.
Математические основы теории риска: Учебн. пособие.
– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 544 с.

## *Экзаменационные билеты*

1. Процессы риска Спарре Андерсена. Классический процесс риска.
2. Определение и простейшие свойства пуассоновского процесса.
3. Смешанные пуассоновские процессы и распределения.
4. Смешанный пуассоновский процесс как процесс размножения.
5. Гамма-экспоненциальная функция и обобщенные обратные биномиальные распределения.
6. Теоремы о связи свойств смешанных пуассоновских процессов и структурных распределений.
7. Определение и графики траекторий дважды стохастических пуассоновских процессов.
8. Простейшие свойства дважды стохастических пуассоновских процессов.

9. Вспомогательные утверждения для описания асимптотических свойств процессов Кокса.
10. Асимптотические свойства процессов Кокса.
11. Распределение суммарных страховых выплат.
12. Формула Поллачека–Хинчина–Беекмана.
13. Приближенная формула для вероятности разорения при малой нагрузке безопасности (без доказательства теоремы).
14. Теорема об асимптотической аппроксимации вероятности разорения при малой нагрузке безопасности.
15. Обобщенные процессы риска и вероятность разорения для обобщений классического процесса риска.
16. Предельные теоремы для проекций обобщенных процессов риска.
17. Теоремы переноса для проекций обобщенных процессов риска.
18. Функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов риска.

## Задачи

Найти математическое ожидание, дисперсию, характеристическую функцию. Все перечисленные случайные величины и процессы независимы.

- $N(t)$ – процесс Кокса, где $\Lambda(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $2$.
- $N_\lambda(\Lambda t)$, где $\Lambda = \begin{cases} 1, & 1/3; \\ 2, & 2/3. \end{cases}$
- $\sum_{k=1}^{N_\lambda(\Lambda(t))} X_k$, где $X_k = 2$ (п.н.), $\Lambda(t) = 3t$.
- Обобщенный процесс Кокса, где $X_k \sim exp(\lambda)$,

$$\Lambda(t) = \begin{cases} \lambda t, & 1/2; \\ 1, & 1/2. \end{cases}$$

- $N_\lambda(\Lambda t)$, где $\Lambda \sim exp(\lambda)$.

Найти математическое ожидание, дисперсию, характеристическую функцию. Все перечисленные случайные величины и процессы независимы.

- $N_\lambda(\Lambda(t))$, где $\Lambda(t) = N_\lambda(\lambda t)$.
- $N_1(N_2(N_3(4t)))$.
- $f_{\lambda/\mu}(x)$, $\mathsf{E}(\lambda/\mu)^z$, $z \in \mathbb{R}$, где $\lambda \sim exp(\theta)$, $\mu \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.
- $$\frac{N_2(N_3(t))}{t} \Longrightarrow ??? \quad (t \to \infty).$$
- $$\frac{\sum_{i=1}^{N_2(n)} X_i - \alpha_n}{\beta_n} \Longrightarrow \Phi(x) \quad (n \to \infty),$$
  $X_i \sim exp(2)$. Найти $\alpha_n$, $\beta_n$.
- $$\frac{\sum_{i=2}^{N_2(N_3(n))} X_i - \alpha_n}{\beta_n} \Longrightarrow \Phi(x) \quad (n \to \infty),$$
  $X_i \sim exp(2)$. Найти $\alpha_n$, $\beta_n$.

# Вопросы по курсу «Прикладные задачи теории вероятностей»

## I. ***Вопросы по теории вероятностей.***

1. Случайная величина.
2. Независимые одинаково распределенные случайные величины.
3. Функция распределения. Основные свойства функции распределения.
4. Математическое ожидание (в общем, дискретном и абсолютно непрерывном случаях).
5. Квантиль распределения. Медиана.
6. Отношение Ляпунова. Классическая дробь Ляпунова.
7. Вероятность.
8. Распределение Пуассона (плотность, характеристическая функция).

## I. *Вопросы по теории вероятностей.*

9. Нормальное распределение (плотность, характеристическая функция).
10. Экспоненциальное распределение (плотность, характеристическая функция).
11. Классическое неравенство Берри-Эссеена.
12. Характеристическая функция (в общем, дискретном и абсолютно непрерывном случаях).
13. Случайный процесс (две сущности).
14. Борелевская сигма-алгебра.
15. Безгранично делимое распределение (два определения).
16. Неравенство Иенсена.
17. Формула полной вероятности.
18. Аналог формулы полной вероятности для математического ожидания.
19. Плотность распределения.
20. $n$-кратная свертка функций распределения.

II. *Вопросы по динамическим моделям.*

1. Процесс риска.
2. Вероятность разорения в динамической модели страхования.
3. Процесс восстановления.
4. Процесс риска Спарре Андерсена.
5. Нагрузка безопасности.
6. Классический процесс риска.
7. Пуассоновский процесс.
8. Теорема об асимптотической нормальности пуассоновского процесса.
9. Точечный процесс. Распределение точечного процесса.
10. Ординарный точечный процесс. Стационарный точечный процесс.

II. *Вопросы по динамическим моделям.*

11. Смешанный пуассоновский процесс.
12. Теорема о безграничной делимости смешанного пуассоновского процесса.
13. Случайная мера.
14. Дважды стохастический пуассоновский процесс (процесс Кокса).
15. ЗБЧ для проекций процессов Кокса.
16. Ф.р. для проекции классического процесса риска.
17. Теорема об асимптотической нормальности классического процесса риска.
18. Теорема переноса.
19. Формула Поллачека-Хинчина-Беекмана.
20. Общий вид оценки для вероятности разорения в классических моделях.

+. *Метод применения формулы полной вероятности для смесей вероятностных законов.*